



**KdG Physik**  
**Themenblock 5:**  
**Messen, Auswerten und Ergebnisdarstellung**  
**HTWG Konstanz**  
**Prof. Dr. Florian Lang**

## **1 Kompetenzen**

Nach diesem Themenblock

- wissen Sie, dass das Ergebnis einer Messung teilweise zufällig ist.
- verstehen Sie, weshalb Messungen unter möglichst identischen Bedingungen wiederholt werden, um Messreihen aufzunehmen.
- können Sie einfache Messungen mit Hilfe einer Tabellenkalkulation auswerten und die Ergebnisse der Messung darstellen.

## **2 Literatur**

Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM), JCGMs

J.R. Taylor, An Introduction to Error Analysis, University Science Books (1997)

Philipp Möhrke, Bernd-Uwe Runge: Arbeiten mit Messdaten: Eine praktische Kurzeinführung nach GUM, Springer, 2020

### 3 Kompakt zusammengefasst:

Der Wert einer physikalischen Größe kann stets nur näherungsweise bestimmt werden. Nicht kontrollierbare Einflüsse wirken sich auf das Ergebnis jeder Messung aus. Das Ergebnis einer Messung ist daher teilweise zufällig. Jedes Messergebnis weist eine Messunsicherheit auf! Zum Umgang mit Messunsicherheiten gibt es ausführliche Regeln in Normen (DIN 1319) und Richtlinien. Die folgende Einführung orientiert sich am Leitfaden „Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement“ (GUM).

Grundsätzlich werden Unsicherheiten bei Messungen in zwei Kategorien unterteilt:

- Typ A  
Unsicherheiten, die durch statistische Methoden bestimmt werden. Ausgangspunkt dafür ist eine Messreihe, in der die Messung unter möglichst identischen Bedingungen mehrfach wiederholt wird. Aus der Messreihe wird berechnet, wie stark die Ergebnisse durch zufällige Einflüsse bei der Durchführung schwanken. Aus diesen Schwankungen wird die Typ A Messunsicherheit berechnet.
- Typ B  
Unsicherheiten, die mit anderen Methoden bestimmt werden. Häufig sind dies Unsicherheiten aufgrund der nicht perfekten Kalibrierung von Messgeräten oder Unsicherheiten von Tabellenwerten. Typ B Unsicherheiten werden oft Datenblättern, Spezifikationen und Tabellenwerken entnommen oder werden abgeschätzt, falls keine entsprechenden Informationen vorliegen.

In dieser Einführung zum Thema beschränken wir uns auf Messunsicherheiten im Fall, dass die gesuchte Größe direkt gemessen und nicht aus anderen Größen berechnet wird. Die Angabe einer Typ B Unsicherheit soll ausreichend sein, um die Auswirkungen des Messaufbaus angemessen zu berücksichtigen.

Das Ziel ist, für die gesuchte **Messgröße**  $Y$  den bestmöglichen **Schätzwert**  $y$  und die **Standardunsicherheit**  $u(y)$  zu bestimmen. Das Ergebnis besagt, dass der tatsächliche (nicht bekannte) Wert der gesuchten Messgröße mit einem Vertrauensniveau von 68% im Bereich  $y \pm u(y)$  liegt.

### Schätzwert und Typ A Unsicherheiten

Basis zur Ermittlung von Typ A Unsicherheiten ist eine Messreihe. Eine Messreihe besteht aus den Ergebnissen von  $n$  unabhängigen Messungen einer

physikalischen Größe  $y$  unter möglichst identischen Bedingungen.

### Messung und Aufzeichnung der Messreihe

Führen Sie die Messung der gesuchten physikalische Größe durch und dokumentieren Sie die einzelnen Ergebnisse  $y_k$  nachvollziehbar in einem Messprotokoll.

Im Messprotokoll sind neben den Messergebnissen und ggf. Messkurven alle Informationen festzuhalten, die notwendig sind, damit die Messung bzw. das Experiment unter möglichst identischen Bedingungen wiederholt werden kann (Skizze des Aufbaus, Foto-Dokumentation, Typ und falls vorhanden Identifikationsnummer der verwendeten Geräte, ...). Es ist empfehlenswert die Messergebnisse während des Experiments in einem Diagramm zu skizzieren, um bereits während der Durchführung einen ersten Eindruck vom Verlauf des Experiments zu erhalten. Das Messprotokoll dokumentiert die Messung und wird nach Abschluss des Experiments nicht mehr verändert.

### Analyse der Messwertverteilung und Ausreißerbereinigung

Prüfen Sie die Messreihe auf Ausreißer, d.h. Messwerte, die offensichtlich fehlerhaft sind. Grundsätzlich sollten Sie bei auffälligen Werten zunächst anhand Ihrer Dokumentation nach Ursachen suchen. Werte, die als Ausreißer betrachtet werden, bleiben in der statistischen Auswertung unberücksichtigt. **Dokumentieren Sie in der Auswertung, welche Werte Sie als Ausreißer betrachten und begründen Sie dies.** Das Messprotokoll bleibt unverändert. Insbesondere werden die Ausreißer im Messprotokoll nicht gelöscht.

### Schätzwert $\bar{y}$ und Typ A Standardunsicherheit $u_A(y)$

Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert  $\bar{y}$  und die experimentelle Standardabweichung des Mittelwerts  $s(\bar{y})$  der ausreißerbereinigten Messreihe. Der arithmetische Mittelwert ist der bestmögliche Schätzwert für die gesuchte Größe. Die experimentelle Standardabweichung des Mittelwerts dient als Maß für die Typ A Standardunsicherheit  $u_A(y) = s(\bar{y})$ .

*Anmerkung: Die Typ A Standardunsicherheit wird in Publikationen manchmal auch als statistischer Fehler bezeichnet.*

- Schätzwert / Mittelwert:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n}$$

- Schätzwert für die Varianz der Messwerte:

$$s^2(y_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\bar{y} - y_k)^2$$

- Schätzwert für die Standardabweichung der Messwerte:

$$s(y_k) = \sqrt{s^2(y_k)}$$

- Typ A Standardunsicherheit

$$u(y) = s(\bar{y}) = s(y_k)/\sqrt{n}$$

Durch eine sehr große Anzahl  $n$  von Messwerten, lässt sich die Typ A Unsicherheit reduzieren! Der arithmetische Mittelwert streut im Vergleich zu den einzelnen Messwerten weniger stark. Das  $1/\sqrt{n}$  Gesetz ergibt sich aus dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die oben angegebenen Formeln werden in der Praxis meist nicht benötigt, da der Mittelwert und die Standardabweichung mit Hilfe des Statistikmodus eines Taschenrechners oder einer Tabellenkalkulation (siehe Anleitung zur Auswertung und Ergebnisdarstellung mit Excel) automatisch berechnet werden.

## Typ B Unsicherheit

Ziel der Bewertung von Typ B Unsicherheiten ist ebenfalls die Angabe einer Standardunsicherheit  $u_B(y)$ . Die beiden Unsicherheitstypen unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihres Ergebnisses, sondern nur in der Methode zur Bestimmung der Unsicherheit. Die Typ B Bewertung wird für Einflüsse eingesetzt, für die keine Messreihe vorliegt, beispielsweise für die Abweichung einer Messgeräteanzeige vom „wahren Wert“. Zu beachten ist, dass das Ergebnis eine Standardunsicherheit  $u_B(y)$  ist. Bei einer normalverteilten Größe bedeutet dies, dass die Schwankung aufgrund der Typ B Unsicherheit mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% kleiner als  $u_B(y)$  ist. Spezifiziert ein Hersteller die Toleranz eines Messgeräts, ist davon auszugehen, dass die Abweichung mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit ( $\gg 68\%$ ) innerhalb dieser Angaben liegt. Die Standardunsicherheit ist typischerweise deutlich kleiner als die spezifizierte Toleranz. Häufig beträgt die Standardunsicherheit weniger als 1/3 der Toleranzspezifikation des Herstellers.

*Anmerkung: Die Typ B Standardunsicherheit wird in Publikationen auch als systematischer Fehler bezeichnet.*

## Kombinierte Unsicherheit und Ergebnisdarstellung

Die kombinierte Standardunsicherheit  $u_c$  wird mit der **Gaußschen Unsicherheitsaddition** berechnet  $u_c(y) = \sqrt{u_A(y)^2 + u_B(y)^2}$ . Häufig wird auch die relative kombinierte Standardunsicherheit  $u_c(y)/y$  angegeben. (Anmerkung: Die Gaußsche Addition von Unsicherheiten kann nur angewandt werden, wenn die Typ A und Typ B Unsicherheiten voneinander unabhängig sind. Die beiden Unsicherheiten müssen unkorreliert sein. In vielen Fällen ist diese Voraussetzung jedoch erfüllt.) Die kombinierte Standardunsicherheit  $u_c(y)$  wird auf zwei signifikante Stellen kaufmännisch gerundet. Der bestmögliche Schätzwert wird anschließend mit gleicher Genauigkeit wie die zugehörige Unsicherheit angegeben.  $y$  wird dazu auf die selbe Stelle gerundet, auf die zuvor  $u_c(y)$  gerundet wurde. Das **Gesamtergebnis** wird wie folgt dargestellt:

$$Y = y \pm u_c(y).$$